Série N : 4 Dipôle RC

EXERCICE 1

On se propose d'étudier la charge d'un condensateur à travers deux résistors, pour cela on réalise le circuit de la **figure 2** formé d'un générateur de tension de fem **E**, d'un condensateur de capacité **C** initialement déchargé, d'un interrupteur K et de deux résistors de résistances $R_1 = 500\Omega$ et R_2 inconnue.

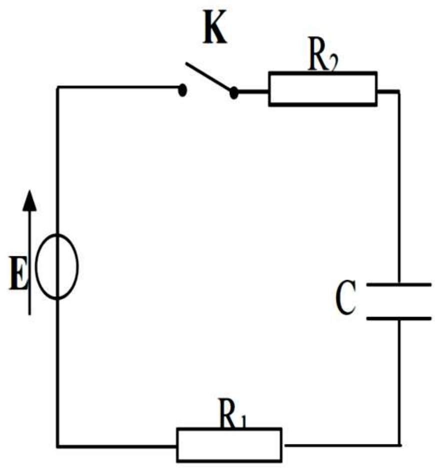
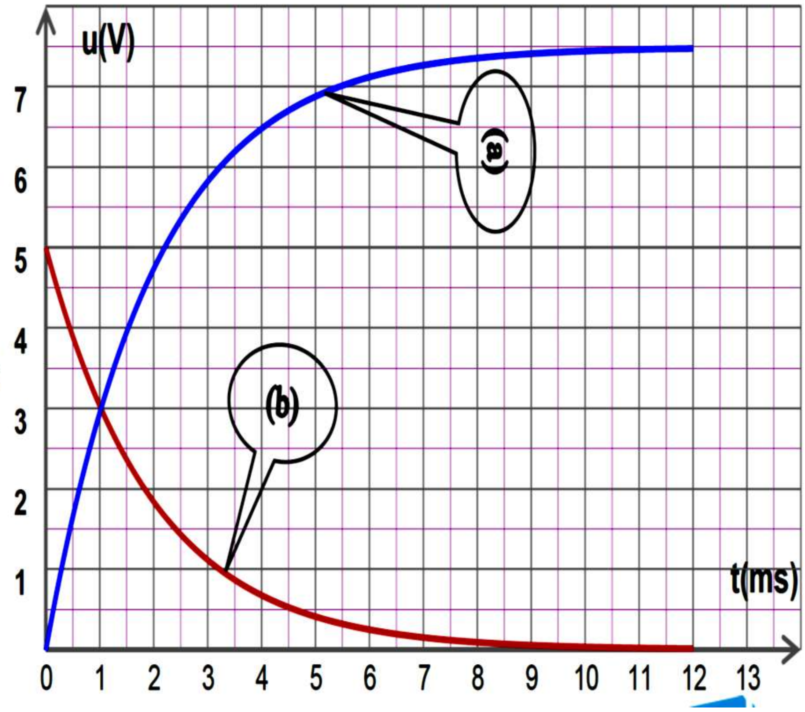


Figure 2

1- Représenter les connexions à effectuer pour visualiser sur un oscilloscope à mémoire les tensions u_c sur la **voie 1** et u_{R1} sur la **voie 2**.

2- Lorsqu'on ferme l'interrupteur K, à t =0, on observe sur l'oscilloscope à mémoire les deux courbes **(a)** et **(b)** suivantes :



a- Justifier que la courbe **(b)** correspond à la tension $u_{R1}(t)$

b- Montrer qu'à l'instant t = 0, la tension u_{R1} est donnée par la relation $u_{R1} = E\frac{R_1}{R_1+R_2}$

3- a- Etablir l'équation différentielle relative à $u_c(t)$.

b- En déduire qu'en régime Permanent u_c= **E.** Donner sa valeur

c- Vérifier que $u_c(t) = Ae^{\alpha t} + B$ est solution de cette équation différentielle avec A , α et B des constantes à déterminer

4- a- Déterminer la valeur de R_2

b- Déterminer graphiquement τ. En déduire la valeur de C.

5- a- Déterminer les expressions en fonction du temps des tensions u_{R1} *et de* u_{R2}

b- Représenter sur le même graphe $u_{R2}(t)$.

EXERCICE 2

Un circuit électrique série schématisé par la ***figure-6-*** comporte :

*/ Un générateur de tension idéal (G) de fem E.

*/ Un résistor de résistance **R = 15384,6 Ω**.

*/ Un condensateur de capacité **C** initialement déchargé.

*/ Un Commutateur K.

A l'instant **t =0**, on ferme **K** sur la position **1** puis on l'ouvre

à un instant de date t_1 **= 80s**.

Un oscilloscope à mémoire enregistre la tension u_G aux bornes

du générateur sur la **voie** Y_2, et la tension u_R aux bornes du résistor sur la **voie** Y_1.

1°) Compléter le schéma de ***la figure -6-*** en ajoutant les connexions à réaliser avec l'oscilloscope.

2°) a- Montrer que la courbe **2** de ***la figure -5-*** correspond à $u_R(t)$.

b- En déduire la valeur de la fem **E** du générateur utilisé.

3°) a- Définir la constante de temps **τ** du dipôle RC .

b- Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps **τ** .

c- En déduire la valeur de **C**.

4°) a- Si l'on veut charger plus rapidement le condensateur, doit-on augmenter ou bien diminuer la valeur de la résistance R? Justifier la réponse.

b- Tracer alors la nouvelle allure de $u_R(t)$ sur la ***la figure -5-***

5°) Calculer l'énergie électrique E_C emmagasiné dans le condensateur à la fin de la charge.

6°) a- Montrer que l'équation différentielle de variable $u_R(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_R(t) = 0$$

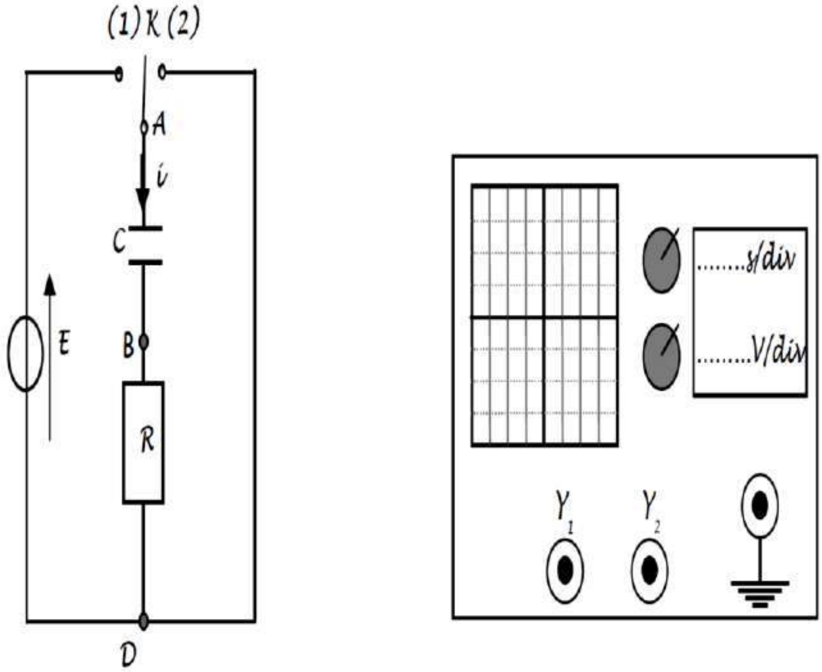
b- Une solution de l'équation différentielle de variable u_R **(t)** s'écrit **:**

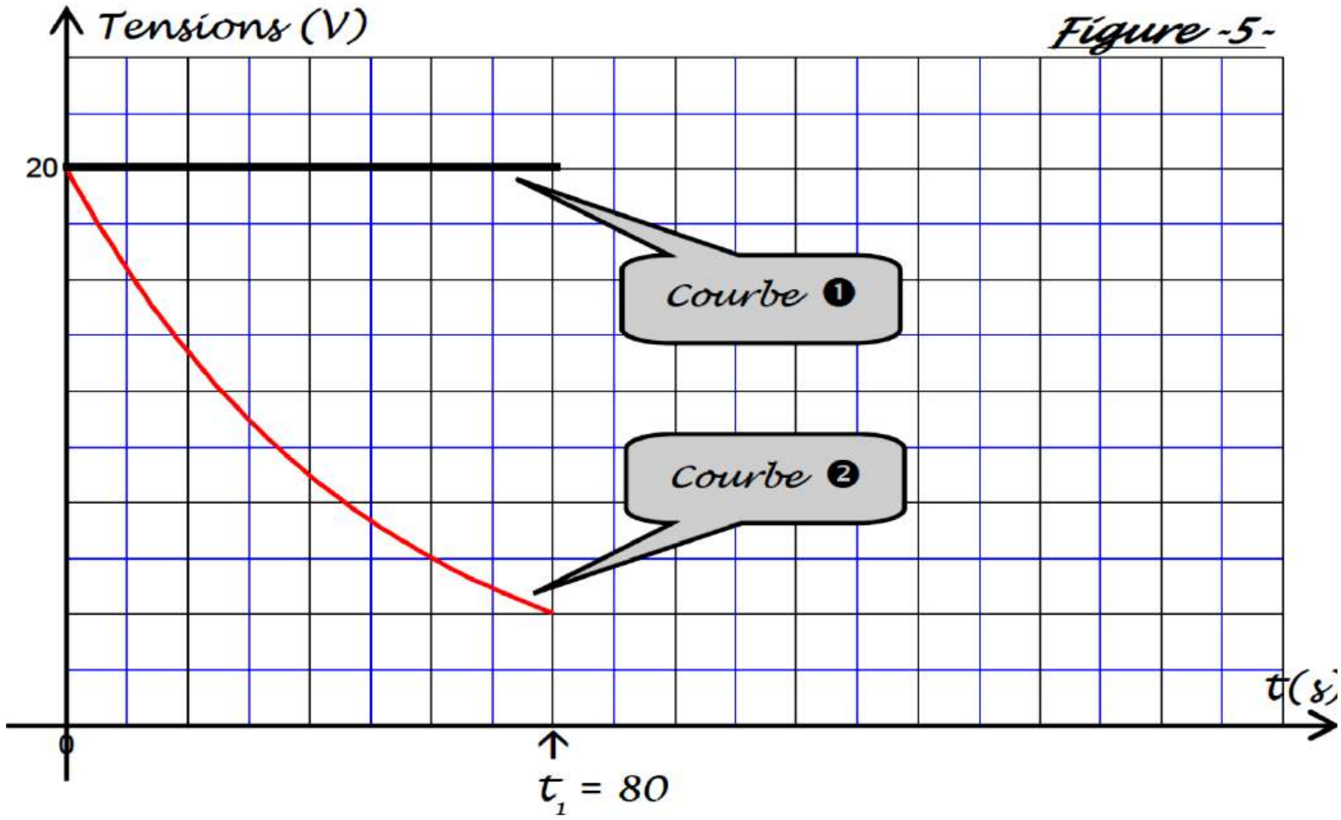
$u_R(t) = Ae^{-\alpha t} + B$ ou A , B et α sont des constantes .Exprimer ces constantes en fonction des paramètres du circuit. En déduire l'expression de $u_R(t)$.

7°) a- Déterminer l'instant t_2, où l'intensité du courant dans le circuit prend la valeur $i(t_1)$**=0,39 mA**.

b- Retrouver ce résultat graphiquement.

Figure -6-

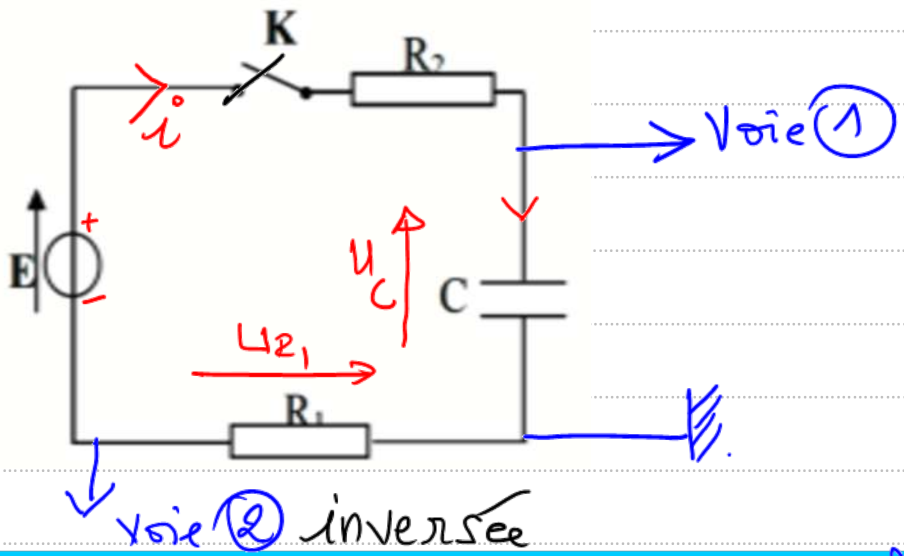

(1) K (2)
A
i
C
E
B
R
D
........s/div
.........V/div
Y_1
Y_2


Tensions (V)
Figure -5-
20
Courbe ❶
Courbe ❷
t(s)
0
t_1 = 80

CORRECTION

EXERCICE 1

1°)



2°) Acceptable si on nous demande d'identifier

$u_C(0) = 0$: ce qui correspond à la courbe a

$\Rightarrow$ a $\longrightarrow u_C(t)$

c-a-d b $\longrightarrow u_{R_1}(t)$

* $u_{R_1} = R_1 i(t)$

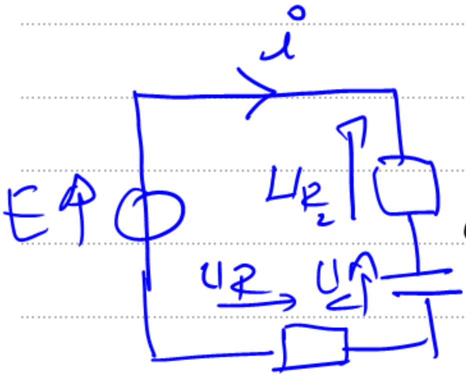
En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert $\Rightarrow I_p = 0 \Rightarrow u_{R_1 p} = 0$: ce qui correspond à la courbe b

NB

$u_{R_1} = R_1 i(t) = R_1 C \frac{du_C}{dt}$. En R.P $u_C = c^{te}$ $\Rightarrow \frac{du_C}{dt} = 0$

$\Rightarrow u_{R_1 p} = 0 \Rightarrow$ Courbe b $\rightarrow u_{R_1}$

ⓑ Mq $u_{R_1}(0) = E\dfrac{R_1}{R_1+R_2}$??



$\forall t \quad u_C(t) + u_{R_1}(t) + u_{R_2}(t) - E = 0$

à $t=0$ $\quad u_C(0) = 0$

$\hookrightarrow u_{R_1}(0) + u_{R_2}(0) = E$

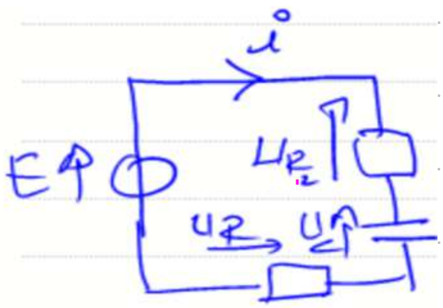
$\Rightarrow u_{R_1}(0) + R_2\, i(0) = E \quad$ or $\quad i(0) = \dfrac{u_{R_1}(0)}{R_1}$

$\Rightarrow u_{R_1}(0) + R_2 \dfrac{u_{R_1}(0)}{R_1} = E$

$u_{R_1}(0)\left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right) = E$

$u_{R_1}(0)\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1}\right) = E \Rightarrow \boxed{u_{R_1}(0) = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}E}$

3°) ⓐ



Loi des mailles

$u_C(t) + u_{R_1}(t) + u_{R_2}(t) - E = 0$

$u_C(t) + (R_1+R_2)\, i(t) = E$

$i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_C}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{u_C(t) + (R_1+R_2)\,C\dfrac{du_C}{dt} = E}$

(b) En régime permanent $u_C = C^{te} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = 0$

$\Rightarrow \boxed{u_{C_P} = E}$ graphiquement $\boxed{E = 7,5V}$

(c) • $u_C(t) = Ae^{\alpha t} + B$ donc $\frac{du_C}{dt} = \alpha A e^{\alpha t}$

eq diff $\Rightarrow Ae^{\alpha t} + B + (R_1+R_2)C\alpha Ae^{\alpha t} = E$

$\Rightarrow B + Ae^{\alpha t}\left[1 + (R_1+R_2)C\alpha\right] = E$

équation vérifiée ssi $1+(R_1+R_2)C\alpha = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{(R_1+R_2)C} = -\frac{1}{\tau}}$

c-à-d : $\boxed{B = E}$

• à $t=0$ $u_C(0) = 0 = A+B \Rightarrow \boxed{A = -B = -E}$

d'où $u_C(t) = -E e^{-\frac{1}{\tau}t} + E$

$= \boxed{E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$.

4°) $u_{R_1}(0) = E \times \frac{R_1}{(R_1+R_2)} \Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{R_1 E}{u_{R_1}(0)}$.

$\boxed{R_2 = \underset{\overset{\shortparallel}{500}}{R_1}\left(\frac{E^{=7,5}}{\underset{=5}{u_{R_1}(0)}} - 1\right)} \Rightarrow \boxed{R_2 = 250\,\Omega}$

NB dans ce cas $u_{R_1}(0)=5V$ et $u_{R_2}(0)=2,5V$ $\quad u_{R_1}(0)+u_{R_2}(0)+u_C(0)=7,5$!! $u_C(0)=0$

$$u_{R_1}(0)=2\,u_{R_2}(0)$$

$$\Rightarrow R_1\cancel{i(0)}=2R_2\cancel{i(0)} \Rightarrow \boxed{R_2=\frac{R_1}{2}=250\,\Omega}$$

b) ⊙ à $t=\tau$ $u_C(\tau)=0,63E=4,72V$

$$\Rightarrow \boxed{\tau=2.10^{-3}s}$$

⊙ $\tau=(R_1+R_2)C \Rightarrow \boxed{C=\frac{\tau}{R_1+R_2}}$

$$\boxed{C=2,66\,\mu F}$$

5°)

a) $u_{R_1}(t)=R_1 i(t)=R_1 C\frac{du_C(t)}{dt}$

$$=R_1C\left(E-Ee^{-\frac{t}{\tau}}\right)'$$

$$=R_1C\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow u_{R_1}(t)=R_1\cancel{C}\frac{E}{(R_1+R_2)\cancel{C}}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

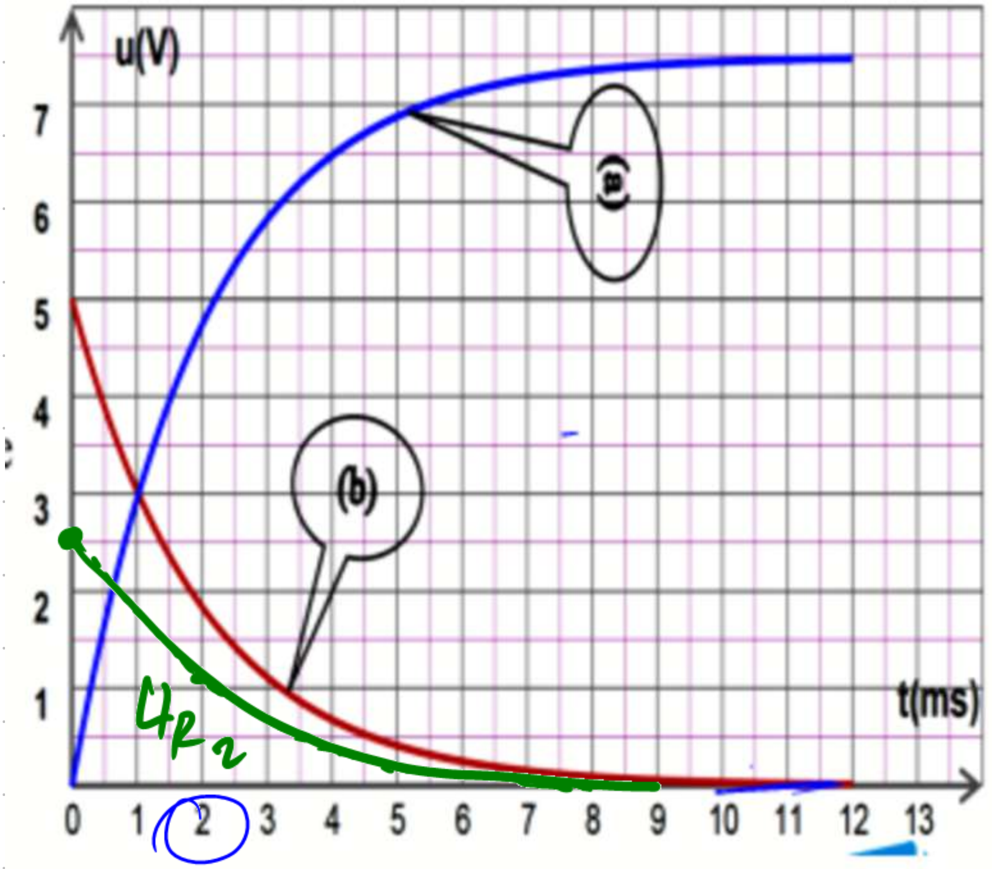
$$\boxed{u_{R_1}(t)=\frac{R_1}{R_1+R_2}Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$$ d'où $$\boxed{u_{R_2}(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$$

b) $u_{R_2}(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} E e^{-\frac{t}{\tau}}$ $u_{R_2}(0) = E - u_{R_1}(0)$ $(u_C(0)=0)$
$= 2,5\,V$

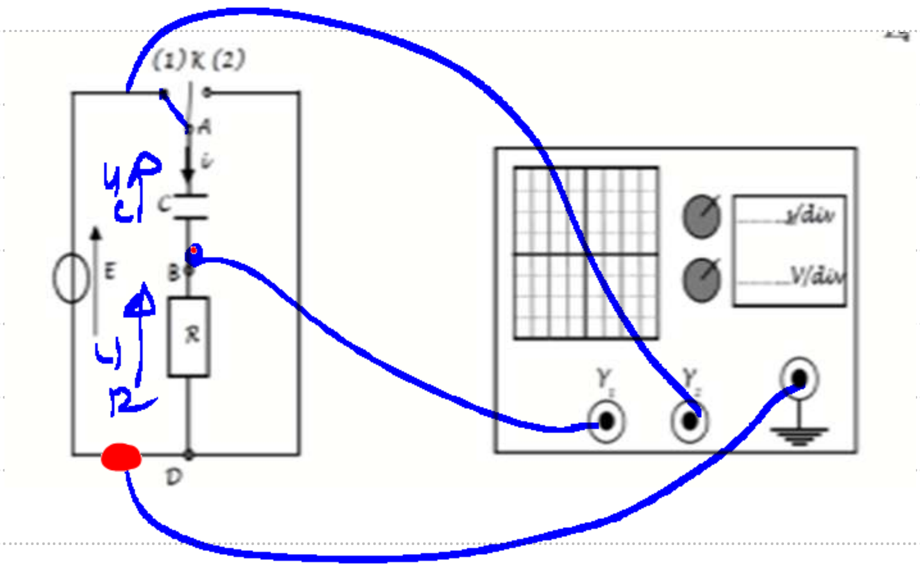
en regime permanent $(t \to +\infty)$ $u_{R_2} \to 0$

$\forall (t)\ u_{R_2}(t) = E - u_{R_1}(t) - u_C(t)$ (L.M)

soit $t = \tau$ $u_{R_2}(\tau) = E - u_{R_1}(\tau) - u_C(\tau) = 7,5 - 1,7 - 4,7$
$= 1,1\,V$



EXERCICE 2



2°/ a) Loi des maille à t=0 $\underbrace{u_C(0)}_{0} + u_R(0) = E$

$\Rightarrow u_R(0) = E$ en plus $u_R(t) \neq$ constante (car $u_C(t)$ varie au cours de la charge $(u_C(t)+u_R(t)=E)$)

$\Rightarrow$ Courbe ② $\longrightarrow u_R(t)$

b) On a $u_R(0) = E$ donc courbe ② $\Rightarrow \boxed{E = 20V}$

3°/ a) c'est une grandeur physique qui caractérise la rapidité de la phase de charge ou de décharge du condensateur

b) $\boxed{u_C(\tau) = 0,63E}$ or $\xrightarrow[\text{à } t=\tau]{\text{L.M}} u_C(\tau) + u_R(\tau) = E$

$u_R(\tau) = E - u_C(\tau) = E - 0,63E \rightarrow \boxed{u_R(\tau) = 0,37E}$

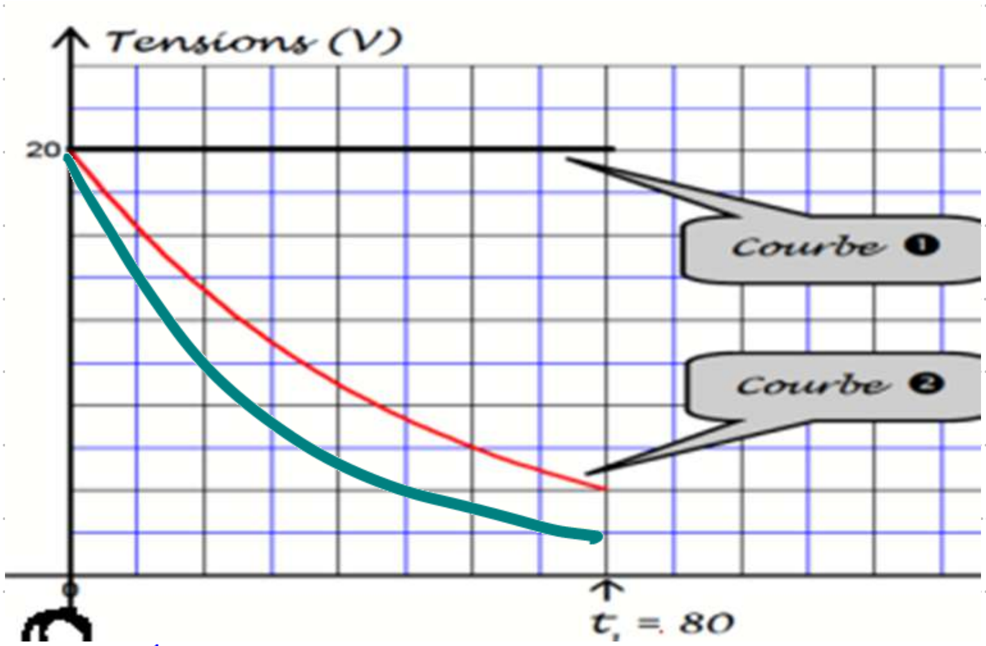
$= 7,4V$

$\Rightarrow \boxed{\tau = 50\,s}$

c) $\tau = R.C \Rightarrow \boxed{C = \frac{\tau}{R} = 3{,}25\,10^{-3}\,F}$

4°) ⓐ $t_c = 5\tau = 5RC$

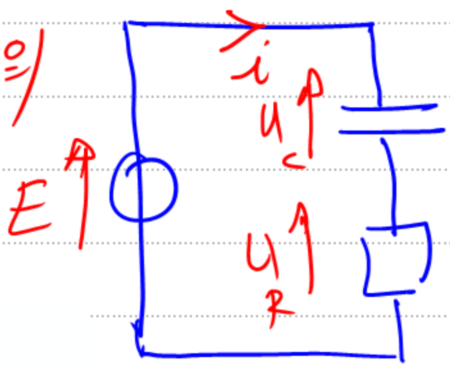
pour diminuer t_c on doit diminuer R



5°) A la fin de la charge $u_c = U_{c\,max} = E$

d'où $E_e = \frac{1}{2} C E^2$ $\boxed{E_e = 0{,}65\,J}$

6°)



Loi des mailles : $u_C(t) + u_R(t) - E = 0$

Dérivons $\frac{du_C}{dt} + \frac{du_R}{dt} = 0$ ①

or $u_R(t) = R\,i(t) = RC\frac{du_C}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC} u_R(t)$$

(1) $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{RC} u_R(t) + \frac{du_R(t)}{dt} = 0}$

b) $u_R(t) = Ae^{-\alpha t} + B$; $\frac{du_R}{dt} = -\alpha A e^{-\alpha t}$

à $t=0$ $u_C(0) = 0 \Rightarrow u_R(0) = E - \underbrace{u_C(0)}_{0}$

$E = A + B$

Eq diff : $\frac{1}{RC} Ae^{-\alpha t} + \frac{B}{RC} - \alpha A e^{-\alpha t} = 0$

$$\underset{\neq 0}{A}\, e^{-\alpha t} \left[\underbrace{\frac{1}{RC} - \alpha}_{0} \right] + \frac{B}{RC} = 0$$

Equation vérifiée si $\boxed{\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}}$

c-à-d $\frac{B}{RC} = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

et $\boxed{A = E}$

$$\boxed{u_R(t) = E e^{-\frac{1}{\tau} t}}$$

7°) a) t_2 ?? / $i(t_2) = 0,39\ 10^{-3}$ A

$$u_R(t_2) = R\, i(t_2) = E e^{-\frac{1}{\tau} t_2}$$

$$e^{-\frac{1}{\tau} t_2} = \frac{R\, i(t_2)}{E} = 0,3$$

$$\Rightarrow \ln\left(e^{-\frac{1}{\tau}t_2}\right) = \ln(0,3)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\tau}t_2 = \ln(0,3) \Rightarrow \boxed{t_2 = -\tau\ln(0,3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 = 60,2\,s}$$

b) $u_R(t_2) = R\,i(t_2) = 6V$

$$\boxed{t_{2\,graphique} = 60\,s}$$